Cvičení ze stochastické analýzy

2. spojité modifikace procesů, existence rozdělení

1. prostory $\mathbb{C}_t, \mathbb{C}_\infty$, metrizovatelnost do polského prostoru při lokálně stejnoměrné konvergenci
2. kompaktní množiny v $\mathbb{C}_t, \mathbb{C}_\infty$.
3. existence rozdělení náhodného procesu na součinové σ-algebře
4. existence spojité modifikace procesu

---

1. Buď $\mathbb{C}_t = \mathbb{C}[0,t]$ prostor všech spojitých funkcí na intervalu $[0,t]$. Ukažte, že je to separabilní Banachův prostor vzhledem k supremální normě $||x||_t = \sup\{|x_s| : s \in [0,t]\}$.

2. Buď $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C}[0,\infty)$ prostor všech spojitých funkcí na intervalu $[0,\infty)$. Ukažte, že lze metrizovat lokálně stejnoměrnou konvergenci funkcí do úplného separabilního metrického prostoru. Návod:
$$d(x,y) = ||x-y||_\infty, \quad \text{kde} \quad ||x||_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} ||x||_n \wedge 2^{-n}.$$

3. Ukažte, že $B_t(y,\varepsilon) = \{x \in \mathbb{C}_\infty : ||x-y||_t < \varepsilon\}, t \geq 0, \varepsilon > 0$ je báze otevřených množin v $\mathbb{C}_\infty$.

4. Pro jaká $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ jsou množiny $H(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ kompaktní v prostoru $\mathbb{C}_1$, kde
$$H(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = \{x \in \mathbb{C}_1 : |x_0| \leq \gamma, \forall\ s,t \in \mathcal{D}_1 \quad |s-t| \leq \delta \Rightarrow |x_s - x_t| \leq \beta |s-t|^\alpha\}$$
a kde $\mathcal{D}_1 = \{k2^{-n} : k = 0,\dots,2^n\}$ jsou diadická racionální čísla na intervalu $[0,1]$.

5. Rozhodněte, zda jsou také kompaktní množiny $\cup_{\varepsilon_i>0} H(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)$ pro $i = 1,2,3,4$.

6. Pokuste se charakterizovat kompaktní množiny v prostoru $\mathbb{C}_\infty$.

7. Ukažte, že existuje centrovaný gaussovský proces X s indexovou množinou $T = [0,\infty)$ a kovarianční strukturou $\operatorname{cov}(X_s, X_t) = s \wedge t$.

8. Ukažte, že existuje centrovaný gaussovský proces X s indexovou množinou $T = [0,1]$ a kovarianční strukturou $\operatorname{cov}(X_s, X_t) = s \wedge t - st$.

9. Rozhodněte, zda existuje spojitá modifikace procesů z příkladů 7,8 a Poissonova procesu.

Buď T indexová množina a E polský prostor s borelovakou σ-algebrou $\mathcal{B}(E)$. Je-li $T_0 \subseteq T_1 \subseteq T$ a $x \in E^{T_1}$, pak symbolem

$$\boldsymbol{x|_{T_0}} = (x_s, s \in T_0) \in E^{T_0}$$

značíme ***zúžení x na indexovou množinu T_0***. V případě potřeby budeme používat obšírnější zápis $\boldsymbol{x|_{T_0} = x|^{T_1}_{T_0}}$. Ve své podstatě $x|^{T_1}_{T_0}$ není nic jiného než projekce $x \in E^{T_1}$ na E^{T_0}. Pro tuto projekci tak dostáváme přirozené označení $\boldsymbol{|^{T_1}_{T_0}} : x \in E^{T_1} \mapsto x|_{T_0} = (x_s, s \in T_0) \in E^{T_0}$. Je-li $A \in \mathcal{B}(E)^{T_0}$, pak uvažujeme její ***(válcovité) rozšíření na indexovou množinu T_1*** předpisem

$$\boldsymbol{A|_{T_1} = A|^{T_0}_{T_1}} = (|^{T_1}_{T_0})^{-1} A = \{x \in E^{T_1} : x|_{T_0} \in A\}.$$

Je-li $A \subseteq E^{T_0}$, pak $A|_T$ je válec s (T_0-rozměrnou) podstavou A. Dále symbolem $\boldsymbol{\mathcal{K}(T)}$ budeme označovat ***množinu všech konečných podmnožin množiny T***. Někdy se $\mathcal{K}$ používá pro kompaktní podmnožiny, což našemu záměru odpovídá, pokud na množině T zavedeme diskrétní topologii krom toho, že kompaktní množiny jsou ve své podstatě zobecněním konečných množin. Symbolem

$$\boldsymbol{\mathcal{KV}(E, \mathcal{B}(E))^T} = \{A|^{T_0}_T : A \in \mathcal{B}(E)^{T_0}, T_0 \in \mathcal{K}(T)\}$$

značíme množinu všech ***měřitelných válců v E^T s konečně rozměrnou podstavou***. Řekneme, že systém konečně-rozměrných rozdělení $\{Q_{T_0}$ na $\mathcal{B}(E)^{T_0}, T_0 \in \mathcal{K}(T)\}$ je ***konzistentní***, pokud pro každé $T_0 \subseteq T_1 \in \mathcal{K}(T)$ platí $Q_{T_1}(|^{T_1}_{T_0})^{-1} = Q_{T_0}$, tj.

$$Q_{T_1}(A|_{T_1}) = Q_{T_0}(A), \quad A \in \mathcal{B}(E)^{T_0}.$$

Věta (Daniell-Kolmogorov) Buď E polský prostor s borelovakou σ-algebrou $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$ a T indexová množina. Je-li $\{Q_{T_0}, T_0 \in \mathcal{K}(T)\}$ konzistentní systém konečně rozměrných rozdělení, pak existuje pravděpodobnostní míra Q_T na $(E, \mathcal{E})^T$ taková, že

$$Q_T(A|_T) = Q_{T_0}(A), \quad A \in \mathcal{B}(E)^{T_0},\ T_0 \in \mathcal{K}(T). \tag{1}$$

Důkaz (pro kompaktní případ): Nechť E je metrický kompakt. Ukážeme, že $\cap_n F_n \neq \emptyset$, kdykoli $F_n \in \mathcal{E}^T, n \in \mathbb{N}$ je nerostoucí posloupnost množin s $Q(F_n) > 2\varepsilon$ pro nějaké $\varepsilon > 0$, kde Q je množinová funkce definovaná jednoznačně předpisem (1) s vynecháním indexu T u Q_T. Nechť $F_n = A_n|_T$, kde $A_n \in \mathcal{E}^{T_n}$. Zřejmě existuje posloupnost kompaktů $K_n \subseteq A_n$ takových, že

$$Q_{T_n}(A_n - K_n) < 2^{-n}\varepsilon, \qquad \text{tj.} \quad Q(F_n - K_n|_T) < 2^{-n}\varepsilon.$$

Pak $Q(K_1|_T \cap \ldots \cap K_n|_T) > \varepsilon$ platí pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy $K_1|_T \cap \ldots K_n|_T \neq 0$. Protože jsou tyto množiny kompaktní podle Tichonovovy věty, platí, že $\emptyset \neq \cap_n K_n|_T \subseteq \cap_n F_n$.[1] Dále je třeba si rozmyslet použití Hopfovy věty, což znamená si uvědomit, že Q je pramíra na algebře $\mathcal{KV}(E, \mathcal{E})^T$.

[1]Obecný nekompaktní případ je nechán na samostatné promyšlení, stejně tak modifikace důkazu nepoužívající Tichonovovu větu pro ty, kteří ji neznají.